

平成21年度 信号処理工学シケプリ

文責 甲斐 常伸

まえがき

期末試験シケプリです。中間があったおかげでそんなに範囲が広くないので頑張っていきましょう。しかし、あまり時間がなかったので、試験に出そうなところなんかをざっくりやっ払いこうとおもいます。図も極力ノートをやつを見てもらいたいです。P-と書いてあったらあげてあるノートのページ数です。

勉強した範囲を大別すると

- ・伝達関数の設計
- ・直線位相特性と最小位相特性
- ・信号推定フィルタ
- ・適応フィルタ
- ・短時間フーリエ変換
- ・ウェーブレット解析

ぐらいでしょう。過去問を見てもと約半分ぐらいが「説明しなさい」のような問題で、やはり計算問題は少し出しにくいようです。なので、言葉での説明を多めにしていきたいと思います。重要な式、言葉は太字にしていこうと思うのでチェックしといてください。面倒くさい式の導出なんかは、ここには書きませんがノートの方に(大抵)書いてあるので余裕のある人はそちらを1回ぐらい見ておくといいでしょう。

第2部 離散時間信号処理工学(の続き)

第6章 離散時間回路の構成と設計(の続き)

[2] 伝達関数の設計

いきなり続きからいきますが、今度はアナログ回路の伝達関数 $H_a(s)$ からデジタル回路の伝達関数を $H_d(z)$ 作ろうというお話です。そのアナログからデジタルの変換には2種類あります。

①標準 z 変換

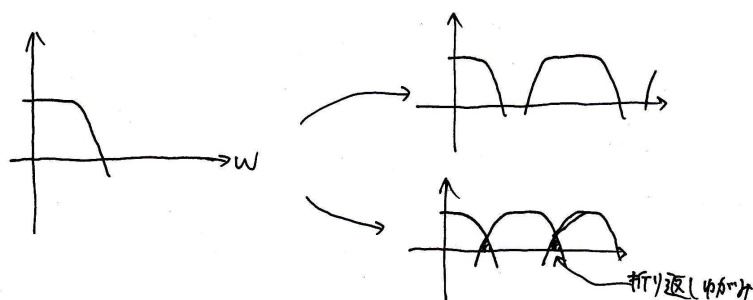
これはアナログのインパルス応答 $h_a(t)$ と、デジタルのインパルス応答 $h_d(n)$ を等しくすればいい、というごく単純な考え方です。つまり、 $h_d(n) = h_a(nT)$ ということになります (T は標準化周期)。

しかし、実際に問題に出たときは

$$H_a(s) = \sum_n \frac{R_n}{s + \alpha_n} \rightarrow H_d(z) = \sum_n \frac{R_n}{1 - z^{-1}e^{-\alpha_n T}}$$

という変換をすればいいのです。 $\frac{1}{s + \alpha_n} \rightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-\alpha_n T}}$ だけ、さっさと覚えてしまいましょう。

この変換の特徴として、LPF, BPF にしか使えません (Print7 参照)。Print7 の標準 z 変換の BEF は想定どおりになっていないことが分かるでしょう。また当然そのように設計してるからなんですが、アナログとデジタルのインパルス応答に違いはありません。しかし、そのまま変換してしまうと下図のように折り返し歪みができてしまうことがあります。その欠点を克服したものが次の変換です。

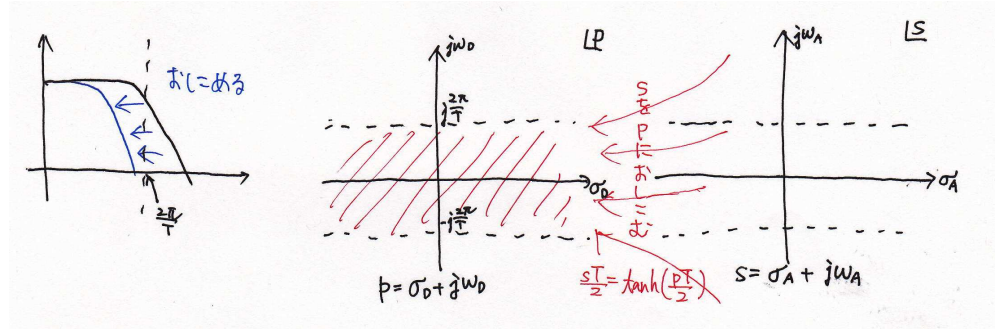


②双一次 z 変換

これは、折り返し歪みができるならその歪みができないようにアナログの信号を $\tanh$ で押し込めた後 (下図の感じです) に標準 z 変換をしようという考え方です。まあ、実際にどうするかというと

$$H_a(s) \text{ に } s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \text{ を代入}$$

すると $H_d(z)$ になります。この変換の特徴としては、当然折り返し歪みが発生しません。しかし、標準 z 変換とは逆に、アナログとデジタルのインパルス応答が違ってきます。Print7 を見れば BEF はきちんと理想どおりになっており、LPF もかなり性能がよくなっているのが分かります。



[3] 直線位相特性と最小位相特性

さて、今度は伝達関数とその極、零点との関係の話になってきました。これは、つい最近電気回路理論第二でもやりましたね。アナログの伝達関数では虚軸上の点 (すなわち $s = j\omega$) と極、零点の関係でした。しかし、デジタルでは z 平面なので、単位円上の点 (すなわち $z = e^{sT} = e^{j\omega T}$) と極、零点の関係になってきます。Print9 の図 10.3 を見ればイメージが沸きやすいと思います。伝達関数を

$$H(z) = C \cdot \frac{\prod_{n=1}^N (1 - \beta_n z^{-1})}{\prod_{m=1}^M (1 - \alpha_m z^{-1})} \quad \begin{cases} \beta_n : \text{零点} \\ \alpha_m : \text{極} \quad (|\alpha_m| < 1) \end{cases}$$

と表せば (安定な伝達関数の極は単位円内にあることを思い出してください)

$$H(e^{j\omega T}) = C \cdot e^{j(M-N)\omega T} \cdot \frac{\prod_{n=1}^N (e^{j\omega T} - \beta_n)}{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega T} - \alpha_m)}$$

となります。これをみれば、極 α_m が単位円に近づけば $|H|$ は大きくなり、零点 β_n が単位円に近づけば $|H|$ が小さくなるという、大まかな特徴が分かるでしょう。

さて、この極と零点の配置によって伝達関数をいろいろなシステムに分類することができます。

①線形位相システム

< 定義 > ある伝達関数 $H(z)$ が $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$ で表せ

$$\begin{cases} 1) h(n) \text{ が実数} \\ 2) \text{ ある } n_0 \text{ に対して対称 or 反対称に分布している} \end{cases}$$

上の 1), 2) を同時に満たすとき $\angle H(\omega)$ は ω に対して直線的に変化する。つまり $\angle H(z) \propto \omega$

こういう伝達関数を持つシステムを線形位相システムといいます。どうして 1), 2) を満たせば $\angle H(z) \propto \omega$ になるのかは、P24 の一番上に書いてあるので余裕のある人は (ry。

説明のために群遅延という言葉を導入しておきます。群遅延 $dg(\omega)$ の数式的な定義は

$$dg(\omega) = -\frac{d\angle H(\omega)}{d\omega}$$

となります。物理的には角周波数 ω の信号成分がシステムを通過するときに受ける遅れ時間です。正直何のこっちゃよく分からないんですが、とにかく群遅延は入力信号に対する出力信号の時間領域における遅れに関する数値で、線形位相システムなら $\angle H(\omega) \propto \omega$ ですから、 $dg(\omega)$ は ω によらない一定値になります。それはすなわち、どの角周波数の成分の信号も等しい時間だけ遅れることになり、結局線形位相システムでは入力信号の波形が出力でも歪まない

というのが重要なことらしい。とりあえず太字だけは覚えましょう。

さて、極、零点の配置の方ですが、 $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$ ですから極は持ちようがありません。極は 0 個です。一方零点の方はというと

$$\begin{aligned} H(z^{-1}) &= \sum_{n=0}^N h(n)z^n \\ &= z^N \sum_{n=0}^N h(n)z^{-(N-n)} \\ &= z^N \sum_{n=0}^N h(N-n)z^{-(N-n)} \quad (\text{対称だから } h(n) = h(N-n)) \\ &= z^N H(z) \end{aligned}$$

より、 $H(z)$ と $H(z^{-1})$ の零点は一致することが分かります。つまり、 $H(z)$ の零点を z_m とすれば z_m^{-1} も $H(z)$ の零点になる。というのが、零点配置の条件です。Print9 の図 10.7 みたいになればいいわけで

すね。

②全域通過システム (All Pass Filter)

< 定義 > $|H(e^{j\omega T})| = 1$ となるシステム

ごくごく単純な定義ですが、これが APF です。入力信号のどの角周波数成分もそのまま素通しにするってことですね。APF は次の式で一般的に表すことができます。

$$H_k(z) = \alpha_k^* \frac{z - \beta_k}{z - \alpha_k} = \frac{z\alpha_k^* - 1}{z - \alpha_k} \quad \left(\begin{array}{l} \text{零点: } \beta_k \\ \text{極: } \alpha_k \end{array} \right) \quad \text{ただし } \alpha_k^* = \frac{1}{\beta_k}$$

これを満たす伝達関数はすべて APF です。また逆に、すべての APF は $\prod_k H_k(z)$ で表すことができます。

極と零点の配置は、 $\alpha_k^* = \frac{1}{\beta_k}$ を見ると、これは原点と (単位円内の) 極 α_k の延長上で原点からの距離が $\frac{1}{|\alpha_k|}$ の位置に零点 β_k があればいいことになる。言葉では説明しづらいですが、Print9 の図 10.8 の感じですね。

幾何学的には零点と極からの距離の比が常に一定であれば APF になります。細かい説明は省きますが、この「距離の比が常に一定」の点の軌跡はアポロニウスの円というものになります。P25 の下の方に書いてあるので (ry。

また、 $\angle H(z)$ はどうなるかという、常に単調減少するらしいです。なので、群遅延は $dg(\omega) = -\frac{d\angle H}{d\omega} > 0$ になります。つまり、どの ω に対しても時間遅れが生じることになります。

③最小位相 (推移) システム

ある振幅特性のなかでもっとも入出力間の遅延 (群遅延) がもっとも小さいものを最小位相 (推移) システムといいます。先ほど出てきた線形位相システムは、波形に歪みが出ないのはいいのですが、伝達関数に極がないことが条件のひとつなので、振幅特性を急峻にするのが難しいようです。なので、こういう振幅特性が欲しい!というときは最小位相 (推移) システムを使うそうです。位相特性が線形じゃなくていいのか? 波形の歪みがそんなに重要でないときもあるらしいのでいいらしいです。

最小位相 (推移) システムは次のように作ることができます。ある安定な伝達関数を $H(z)$ とすれば、次のような $G(z)$ を考える

$$|H(e^{j\omega T})| = |G(e^{j\omega T})| \quad (H(z) \text{ と } G(z) \text{ の振幅特性が等しい})$$

この時、 $H_a(z) = H(z)/G(z)$ とすれば

$|H_a(e^{j\omega T})| = 1$ であり $H_a(z)$ の極 = $H(z)$ の極 & $G(z)$ の零点 となる。

$H(z)$ は安定なので $H(z)$ の極は当然単位円内にある。したがって、 $G(z)$ の零点が単位円内にあれば $H_a(z)$ は安定な APF といえる。ということは

$$\begin{aligned} -\frac{d\angle H_a(e^{j\omega T})}{d\omega} &> 0 \\ -\frac{d}{d\omega} \{ \angle H(e^{j\omega T}) - \angle G(e^{j\omega T}) \} &> 0 \\ -\frac{d\angle H(e^{j\omega T})}{d\omega} &> -\frac{d\angle G(e^{j\omega T})}{d\omega} \end{aligned}$$

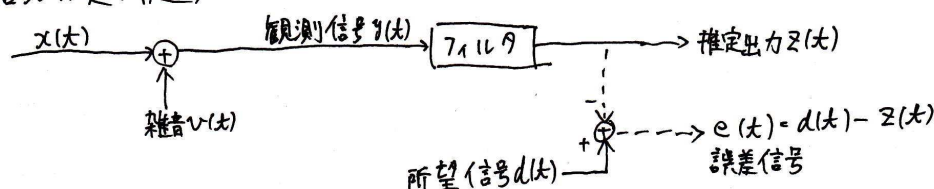
これより、 $G(z)$ は $|H(z)|$ という振幅特性を持つシステムのなかで群遅延が最小であることが分かる。結局、最小位相 (推移) システム $G(z)$ が満たすべき条件はその零点が (極と同様に) 単位円内にあればよいということです。

第3部 信号処理用フィルタ

第7章 信号推定フィルタ

さて、今までフィルタといえばLPFとかHPFとか入力信号を加工したりするものでしたが、入力信号を使って何かを予測するぜ！というフィルタも作ることができます。一般的な信号は下図のようにモデル化することができます。

〈信号の推定問題〉



この所望信号 $d(t)$ を例えば $d(t) = x(t - \Delta)$ とすれば、

$$\begin{cases} \Delta > 0 & \text{過去を推定：平滑フィルタ} \\ \Delta = 0 & \text{現在を推定：ろ波フィルタ} \\ \Delta < 0 & \text{未来を推定：予測フィルタ} \end{cases}$$

ということになります。このような推定出力 $z(t)$ を出力するようなフィルタをどうやって作るか?が今からの問題です。ここで $J = E[e^2(t)]$ とすればこの J を最小にするようなフィルタを求めることになります。 $E[\]$ ってなんやねん、という感じですが、これは誤差 $e(t)$ を評価する何かしらの演算だと思えばいいんだと思います。例えば、2乗平均をとるとか。この値が小さければ小さいほど所望信号に近づくということです。

[2] 離散型ウィナーフィルタ

さて、まずは離散系で考えてみましょう。離散ではフィルタのインパルス応答を $h(n)$ とすればフィルタを通した推定信号 $z(t)$ は $z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)y_{k-n}$ と表せます。

$$\begin{aligned} J &= E[e_k^2] = E[(d_k - z_k)^2] \\ &= E[(d_k - \sum_{n=0}^{\infty} h(n)y_{k-n})^2] \end{aligned}$$

この J を最小にするということは

$$\frac{\partial J}{\partial h(l)} = 0 \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

となればよいということである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial h(l)} &= E[2(d_k - \sum_{n=0}^{\infty} h(n)y_{k-n})(-y_{k-l})] \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} h(n)E[y_{k-n}y_{k-l}] - 2E[d_k y_{k-l}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

つまり $\sum_{n=0}^{\infty} h(n)E[y_{k-n}y_{k-l}] = E[d_k y_{k-l}]$ という関係が得られる。

ここで

$$\begin{aligned}\varphi_{yy}(n-l) &= E[y_{k-n}y_{k-l}] = \varphi_{yy}(l-n) && : y_k \text{の自己相関関数} \\ \varphi_{dk}(-l) &= E[d_k y_{k-l}] = \varphi_{dk}(l) && : d_k \text{と } y_k \text{の相互相関関数}\end{aligned}$$

とすれば、先の関係は

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \varphi_{yy}(l-n) = \varphi_{dy}(l) \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

と書くことができる。これを離散型 Winner-Hopf 方程式という (以下 W-H 方程式)。これは、どういう意味かという $\varphi_{yy}, \varphi_{dy}$ さえ分かっちゃえば、**W-H 方程式**によってインパルス応答 $h(n)$ がわかってしまうということです。

もっと具体的に FIR のウィーナーフィルタならば、 $n = 0, 1, \dots, N-1$ であるから、W-H 方程式は

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \varphi_{yy}(l-n) = \varphi_{dy}(l) \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

となります。これを行列で書けば

$$\begin{pmatrix} \varphi_{yy}(0) & \varphi_{yy}(1) & \varphi_{yy}(2) & \cdots & \varphi_{yy}(N-1) \\ \varphi_{yy}(1) & \varphi_{yy}(0) & \varphi_{yy}(1) & \cdots & \varphi_{yy}(N-2) \\ \varphi_{yy}(2) & \varphi_{yy}(1) & \varphi_{yy}(0) & \cdots & \varphi_{yy}(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{yy}(N-1) & \varphi_{yy}(N-2) & \cdots & \cdots & \varphi_{yy}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{dy}(0) \\ \varphi_{dy}(1) \\ \varphi_{dy}(2) \\ \vdots \\ \varphi_{dy}(N-1) \end{pmatrix}$$

これは単なる N 元連立方程式なので $h(n)$ について解くことができる。

[2] 連続型ウィーナーフィルタ

< 連続型 W-H 方程式 >

$$\int_0^{\infty} h(\tau) \varphi_{yy}(t-\tau) d\tau = \varphi_{dy}(t) \quad t \geq 0$$

離散型とまったく同じ議論で連続系の W-H 方程式を導くことができます。しかし、この式の左辺をよく見てみましょう。よく見ると、左辺は h と φ_{yy} の畳み込み演算に見えなくもありません。異なるのは下の積分範囲だけです。この 0 はインパルス応答 $h(t)$ が因果性によって $0 \leq t \leq \infty$ で定義されているからです。ここをちょっとごまかして $-\infty \leq t \leq \infty$ とすれば、W-H 方程式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \varphi_{yy}(t-\tau) d\tau = \varphi_{dy}(t)$$

と書けます。この両辺をフーリエ変換すれば

$$H(j\omega) \cdot \Phi_{yy}(j\omega) = \Phi_{dy}(j\omega)$$

$$\text{すなわち} \quad H(j\omega) = \frac{\Phi_{dy}(j\omega)}{\Phi_{yy}(j\omega)} = \frac{\text{観測信号と所望信号の相互スペクトル密度}}{\text{観測信号の電力スペクトル密度}}$$

連続系なら、スペクトル領域で計算する事もできるということです。

当然、 $h(t)$ の因果性を無視してしまっているの、そこを正しくやろうと思うとやはり厳密に W-H 方程式を解くか、平滑フィルタなら遅延を大きくとればいい近似になるそうです。

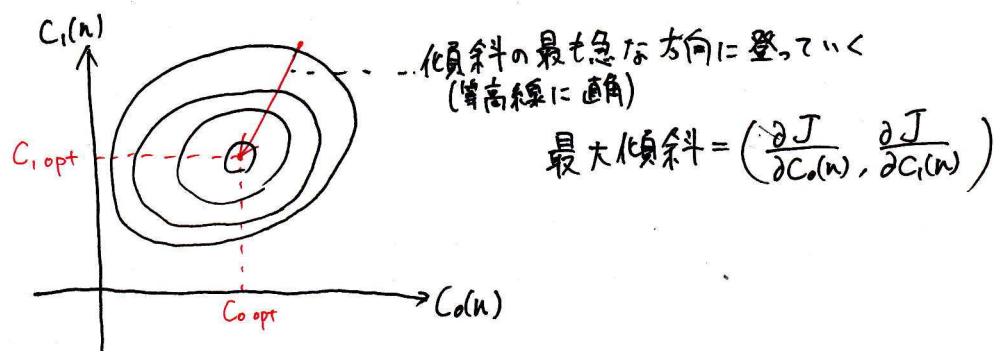
第8章 適応フィルタ (Adaptive Filter)

今までフィルタの係数は定数でしたが、今度は係数が時間の関数になっているバージョンです。この場合出力 $y(n)$ は $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k(n)x(n-k)$ となります。係数 $C_k(n)$ が時間の関数になっているわけですね。

今度は $J = \sum_n [e^2(n)]$ として、この J を最小にするように $C_k(n)$ を決定していきます。さっきと同様に W-H 方程式を解いて直接計算してもいいわけなんですけど、逆行列の計算とかをしないといけなくて、計算量が多くなるそうです。なので、逐次近似型という手法をやってみます。

[1] 逐次近似適応アルゴリズム

逐次近似適応アルゴリズムは山登り法や、山下り法をつかって少しずつ係数を修正していきます。下の図の感じです。



式で書けば次の時刻の係数 $C_k(n+1)$ を次のように決めてあげます。

$$C_k(n+1) = C_k(n) + \alpha \frac{\partial J}{\partial C_k(n)}$$

$$\text{ここで } J = \sum_n [e^2(n)] = \sum_n [(d(n) - y(n))^2] = \sum_n [d(n) - \sum_k C_k(n)x(n-k)]^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial C_k(n)} &= 2 \sum_n [d(n) - \sum_{k'} C_{k'}(n)x(n-k')] [-x(n-k)] \\ &= -2 \sum_n e(n)x(n-k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{これより } C_k(n+1) &= C_k(n) - 2\alpha \sum_n e(n)x(n-k) \\ &= C_k(n) + \mu \sum_n e(n)x(n-k) \quad (-2\alpha = \mu) \end{aligned}$$

特に $\sum_n$ を省略したもの

$$C_k(n+1) = C_k(n) + \mu e(n)x(n-k)$$

を **Least Mean Square (LMS)** アルゴリズムまたは、**Widrow** アルゴリズムという。この回路を実際に構成すると次ページの図のようになります。この μ が小さすぎるとなかなか収束せず、大きすぎると発散してしまいます。決める目安として

$$\mu = \frac{1}{(\text{入力エネルギー}) \times (\text{係数の数})}$$

という式があります。

さて、ここで **Print12 図 1.15** をじっくり見て理解してみてください。これはつまり、元の信号 $x(t)$ の周波数スペクトルはもともと $X_1(\omega)$ であったのに、時間領域で $W(t)$ をかける（すなわち周波数領域で $X_2(\omega)$ で畳み込む）ことによって、 $Y(\omega)$ という周波数スペクトルになってしまった、ということです。ある周波数の成分がピンと立っている $X_1(\omega)$ が、横に「もれ」でどの成分が含まれているのかが曖昧な $Y(\omega)$ になってしまいました。このもれがひどすぎる場合は、周波数解析ができなくなってしまいます。ここで、このもれに着目してみます。

Print12 表 1.2 に方形窓 (単一方形パルス) のフーリエ変換が載っています。これを見れば分かるように方形窓の時間幅 t_b と周波数スペクトルの広がりとは反比例しています。つまり、時間幅 (時間分解能) を短くして詳しく見ようとする、周波数でのもれが広がってしまい、逆に周波数をきちんと見ようとする (周波数分解能をよくする) と時間幅が大きくなってしまふ。という一種の不確定性を持っています。というわけで、この周波数スペクトルのもれをできるだけ小さくするような窓関数が開発されています。

[3] 様々な窓関数とそのスペクトル

- ・ 方形窓
- ・ 三角窓
- ・ ハニング窓
- ・ ハミング窓
- ・ ブラックマン窓

数式は試験に出たとしても与えてくれると思いますから、書きません。形は Print12 図 36-45 あたりを確認して流し読みしておけばいいでしょう。これらの窓関数はメインローブが細かったり、サイドローブが低かったりと、それぞれの特長がありますがこの二つの特長はトレードオフの関係になっています。したがって、解析する信号に応じて最適の窓関数は変わってくるんだそうです。

また一つ注意があって、離散のフーリエ変換では窓関数の窓幅の外側は同じ波形が周期的に続いていることになっています。単に方形窓をかけただけではその境目で不連続点ができてしまいます。なので、窓関数の境目のところが0になっている窓関数 (三角窓とか、ハニング窓とか) をかけてあげれば不連続点がなくなるので都合がいいそうです。

[4] 短時間フーリエ変換

というわけで、これらの窓関数を使って信号が十分定常である時間幅を設定し、その窓をずらしながら区分的にフーリエ解析を行うことを短時間フーリエ変換といいます。数式でかけば

$$F(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t-b)f(t)e^{-j\omega t} dt$$

今までのフーリエ変換に $W(t-b)$ をかけただけです。 b によって窓関数をシフトすることができます。

[5] ガボール変換=ガウス窓による短時間フーリエ解析

単に窓関数が $g_\alpha(t)$ になっただけです。

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$

となります。これはいわゆるガウス分布というやつですね。 α によって窓幅が決まります。一応数式を書いとくと

$$G_\alpha(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(t-b)f(t)e^{-j\omega t} dt$$

これを、ガボール変換といいます。わざわざ $G_\alpha(\omega, b)$ という、別の記号にしているんですね。

[6] 様々な分析例ー方形、三角、ガウスー

具体的にどんなスペクトルが見えるのかみてみましょう。Print13 図 2.8, 2.10 とかを見てください。スペクトルがグラフになってますが、横軸が時間 (b に相当)、縦軸が振動数 (ω に相当)、白色の強さがスペクトルの強さ、と 3 次元のグラフになっています。上、真ん中、下の 3 つのグラフがそれぞれ、方形、三角、ガウスが窓関数になっていて、右に行くほど窓幅が狭くなっています。どのグラフも右に行くほど (時間幅が短くなるほど) 周波数のもれが大きくなっていて、もはやどの周波数成分が含まれているのか分かったもんじゃないやありません。このようにどの窓関数を選ぶかや、窓幅によってかなりスペクトルに違いが出てきています。

今までフーリエ変換をずっとやって来ましたが、その基本波はずっと $e^{j\omega t}$ でした。これは定常的な波なので、定常的な信号を表すのには都合がよいのですが、動的な信号を短時間フーリエ変換で解析するとどうしても、時間分解能と周波数分解能の制約がでてきてしまいます。なので、定常的ではない、局所的な波を基本波として使っちゃおう!というのが次です。

第 10 章 ウェーブレット解析 (のいろは)

フーリエ変換は基本波 $e^{j\omega t}$ のいろいろな周波数の重み付き重ね合わせでした。では、ウェーブレットは? ウェーブレットは基本波 $\psi(t)$ をいろいろ拡大縮小と、移動させたものの重み付き重ね合わせになります。さて、 $\psi(t)$ には満たすべき条件があります。それは、

- ・ $\psi(t)$ は $t = 0$ に局在している。
- ・ $\overline{\psi(t)} = 0$ ($\psi(t)$ の平均が 0)

を満たせば、拡大縮小分 a (スケーリング) と移動分 b (シフト) を使った

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a > 0)$$

を基本波として $f(t)$ を表現することができる。ウェーブレット変換を式で表すと

$$(W_\psi, f)(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

となります。この式の a がフーリエ変換でいう ω と同じ役割をしています。逆変換はできません。たぶん、おそらく。だって、めんどいし。

[1] 短時間フーリエ解析からウェーブレット解析へ

さきほどのガボール変換からガボールウェーブレットを導きます。ガボール変換は

$$(G_b^\alpha f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(t-b) f(t) e^{-j\omega t} dt$$

ここで、 $G_{b,\omega}^\alpha(t) = e^{j\omega t} \cdot g_\alpha(t-b)$ とすれば

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) G_{b,\omega}^{\alpha*} dt$$

この $G_{b,\omega}^{\alpha*}(t)$ を基本波として考える。しかし、このままでは $\overline{G_{b,\omega}^\alpha(t)} = 0$ を満たさない。よって、次のように決めれば基本波にすることができる。

$$\psi(t) = g_\sigma(t) \left[e^{j\omega_0 t} - e^{-(\sigma\omega_0)^2} \right]$$

とすれば、 $\overline{\psi(t)} = 0$ となる。